Giải tích 3A – Tích phân vector (Green – Stokes – Gauss & Bẫy thi)

I. Nhận diện 5 giây (quan trọng nhất)

Gặp trong đề	Dùng
$\oint Pdx + Qdy$ ($\mathbb{R}^2$)	Green
$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ($\mathbb{R}^3$)	Stokes
$\iint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$	Gauss
Thông lượng + mặt cong	Gauss
Tích phân đường + curl	Stokes

II. Công thức cốt lõi (phải thuộc)

Green

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Stokes

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

Gauss

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

III. Các “câu thần chú” đi thi

- Curl = 0 $\neq$ bảo toàn (phải xét miền).
- Miền thủng □ có thể $\oint \neq 0$.
- Mặt hở □ đóng nắp rồi trừ.
- Thông lượng khó □ tìm Gauss.
- Muốn thể tích □ chọn div $F = 1$.

IV. Trường bảo toàn – cực kỳ hay ra

Điều kiện đủ:

- Curl = 0.
- Miền đơn liên.

Dấu hiệu bẫy:

$$\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{xoáy quanh trục.}$$

$\Rightarrow$ Curl = 0 nhưng $\oint = 2\pi$.

V. Tọa độ hay dùng

Tọa độ trụ

$$x^2+y^2, \text{ tròn, paraboloid,} \quad dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Tọa độ cầu

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

VI. Chọn trường vector "ăn điểm" (Gauss)

Mục tiêu	Chọn
Thể tích	$\vec{F} = (x/3, y/3, z/3)$, div = 1 □
Mặt đáy $z = \text{const}$	Thường cho 0

VII. Bảng tổng hợp nhanh

Định lý	Bản chất
Green	Biên ↔ diện tích
Stokes	Biên ↔ xoáy
Gauss	Mặt kín ↔ nguồn

Green = Stokes ($\mathbb{R}^2$). Stokes = Gauss (cho curl).

VIII. 5 lỗi chết người khi đi thi

- Không xét miền xác định.
- Quên hướng pháp tuyến.
- Tính trực tiếp khi dùng định lý được.
- Không đóng mặt khi dùng Gauss.
- Tham số hoá đường gấp khúc không cần thiết.

IX. Dòng cuối cùng (rất quan trọng)

Đừng tính – Hãy biến đổi. Đừng lao vào tích phân – Hãy dùng định lý.